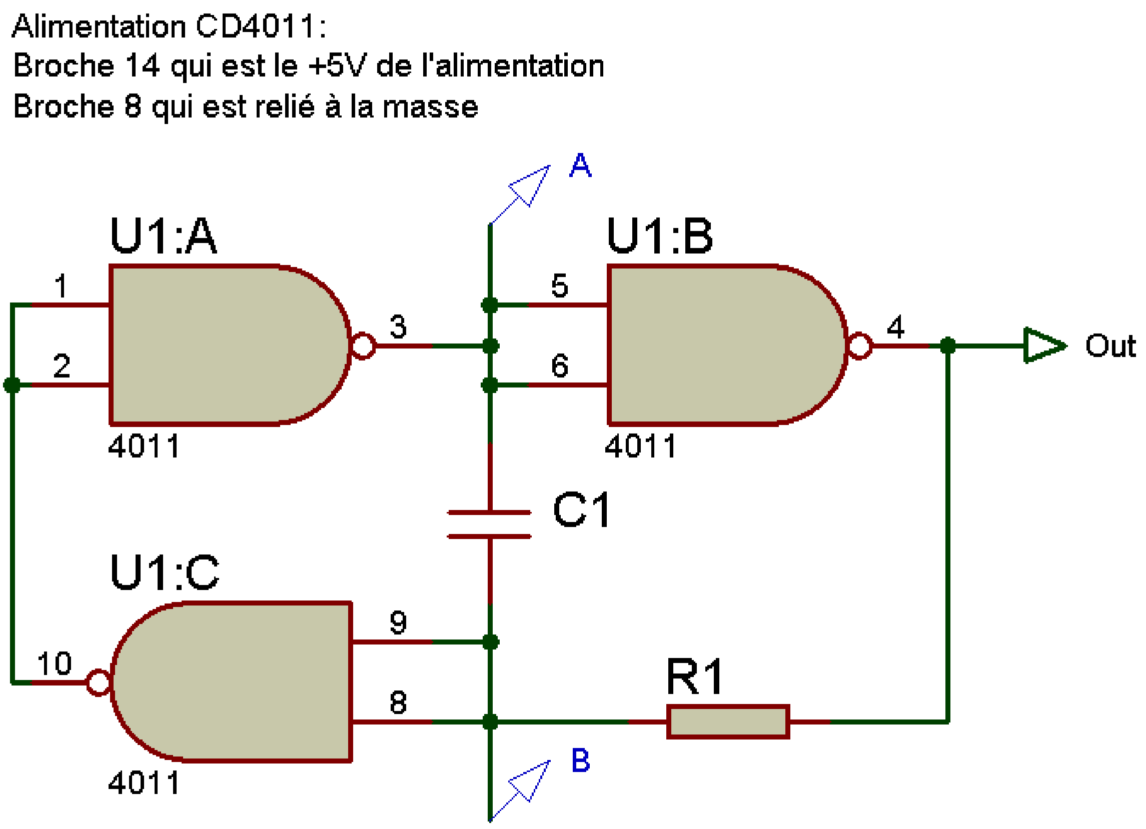
NOTE DE CALCUL

Montage électronique :

Figure 1



1. <u>Présentation</u>

Le but de cette note de calcul est de déterminer le choix du condensateur C1 en fonction de la résistance R1, qui va nous permettre de calculer la fréquence. En effet il est plus facile de dire que c'est égale à $\frac{1}{1{,}70 \times RC}$, plutôt que de ce « coltiner » tous les calculs, mais bon…. c'est toujours plus agréable de comprendre « le pourquoi du comment », et c'est d'ailleurs pour cette raison que j'ai réalisé cette note de calcul.

Je ne ferais pas un cour de mathématique, mais je donnerais juste des détails sur certaines méthodes de résolution des équations avec second membre par exemple. Je ne donne juste un aperçu sur le calcul mathématique, le but n'est pas de faire un cours magistral mais de comprendre et d'en tirer une leçon sur le comportement du signal qui varie dans le temps.

Datasheet du CD4011

DC Electrical Characteristics (Note 2)

Symbol	Parameter	Conditions	−40°C		+25°C			+85°C		Units
			Min	Max	Min	Typ	Max	Min	Max	
I_{DD}	Quiescent Device Current	$V_{DD} = 5V, V_{IN} = V_{DD}$ or V_{SS}		1		0.004	1		7.5	μA
		$V_{DD} = 10V, V_{IN} = V_{DD}$ or V_{SS}		2		0.005	2		15	μA
		$V_{DD} = 15V, V_{IN} = V_{DD}$ or V_{SS}		4		0.006	4		30	μA
V_{OL}	LOW Level Output Voltage	$V_{DD} = 5V$		0.05		0	0.05		0.05	V
		$V_{DD} = 10V$ $\|I_O\| < 1$ μA		0.05		0	0.05		0.05	V
		$V_{DD} = 15V$		0.05		0	0.05		0.05	V
V_{OH}	HIGH Level Output Voltage	$V_{DD} = 5V$	4.95		4.95	5		4.95		V
		$V_{DD} = 10V$ $\|I_O\| < 1$ μA	9.95		9.95	10		9.95		V
		$V_{DD} = 15V$	14.95		14.95	15		14.95		V
V_{IL}	LOW Level Input Voltage	$V_{DD} = 5V, V_O = 4.5V$		1.5		2	1.5		1.5	V
		$V_{DD} = 10V, V_O = 9.0V$		3.0		4	3.0		3.0	V
		$V_{DD} = 15V, V_O = 13.5V$		4.0		6	4.0		4.0	V
V_{IH}	HIGH Level Input Voltage	$V_{DD} = 5V, V_O = 0.5V$	3.5		3.5	3		3.5		V
		$V_{DD} = 10V, V_O = 1.0V$	7.0		7.0	6		7.0		V
		$V_{DD} = 15V, V_O = 1.5V$	11.0		11.0	9		11.0		V

J’aimerais que vous regardiez attentivement l’encadré rouge, et plus précisément :
VIL et VIH qui correspondent aux entrées du CD4011 et c’est sur ces entrées que tous va se jouer.

Pour VIL (niveau bas logique) il est atteint lorsque VIL<=2V.
Pour VIH (niveau haut logique) il est atteint lorsque VIH>=3V.
Puis les tensions qui se trouvent entre 2V et 3V sont des états indéterminés
la tension vaut VCC/2=5/2=2,5V

Vous avez compris lorsque la tension atteint ces deux « palier » le CD4011 change d’état.

Avant la mise sous tension

Avant la mise sous tension, le montage électronique est au repos, le condensateur est totalement déchargé 0V, la tension appliquée au point B est donc de 5V ce qui implique un état haut sur l’entrée du U1:C et un état logique bas en sortie, et puisque la sortie du U1:C est reliée sur l’entrée du U1:A un état logique haut se retrouve en sortie du U1:A soit 5Vau point A.

Lorsque le point A est au potentiel 5V la sortie du U1:B est à 0V, on se retrouve donc dans une configuration comme le montre la Figure 2.

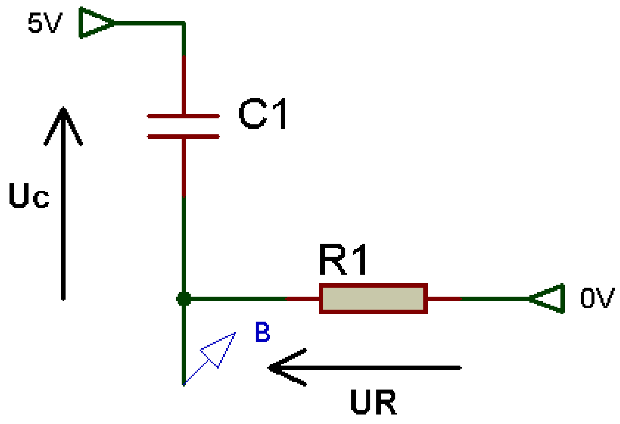


Figure 2 : *Le montage équivalent correspond à un système linéaire du 1er ordre.*

Le condensateur C1 va donc se charger à travers la résistance R1, il s'agit d'un système du 1er ordre qui s'écrit de la façon suivante :

$$\boxed{\boldsymbol{5V = Uc + Ur = Uc + Ric = Uc + RC\frac{dUc}{dt}}}$$

$$(le\ courant\ Ic\ est\ le\ courant\ qui\ parcourt\ C1\ puis\ R1)$$

1. Équations différentielles

Charge du condensateur C1

$$\boldsymbol{RC\frac{dUc}{dt} + Uc = 5V}$$

On résout l'équation sans second membre ce qui donne :

$$\boldsymbol{RC\frac{dUc}{dt} + Uc = 0} \qquad => \qquad \boldsymbol{\frac{dUc}{dt} = -\frac{1}{RC}Uc}$$

La solution de l'équation différentielle linéaire sans second membre est du type :

$$\boxed{\boldsymbol{Uc = ke^{-\frac{t}{RC}}}\ (avec\ k\ cst\ réelle\ quelconque)}$$

Maintenant nous recherchons une solution particulière qui s'annule lorsque RC(dUc/dt)+Uc=5V:

$Y = Ax + B$

$\frac{dY}{dt} = A$

$RCA + Ax + B = 5V$

Il suffit que :

$$\begin{cases} B + RCA = 5 \\ A = 0 \end{cases} \quad \text{=> } \mathbf{B=5}$$

La solution particulière est donc Y=B=5

Les solutions de l'équation différentielle linéaire s'obtiennent en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène une solution particulière de l'équation avec second membre.
Ce qui nous donne :

$$\boldsymbol{Uc = ke^{-\frac{t}{RC}} + Y}$$

$$\boldsymbol{Uc = ke^{-\frac{t}{RC}} + 5}$$

À t=0 nous avons Uc=0V

$\boldsymbol{0 = k + 5 \; d'où \; k = -5}$

L'équation s'écrit :

$$\boxed{\boldsymbol{Uc(t) = 5\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)}}$$

Il en résulte que le condensateur va se chargé sous cette formule, essayons maintenant de voir comment évolue le potentiel au point B :

$$5 - Uc(t) = Ur \;\; => \;\; 5 - (5 - 5\boldsymbol{e}^{-\frac{t}{RC}}) = \boldsymbol{5e^{-\frac{t}{RC}}}$$

Le potentiel au point B

$$\boxed{\boldsymbol{VB = 5e^{-\frac{t}{RC}}}}$$

Le potentiel est important à savoir car c'est celui-ci qui va faire « basculer » l'état logique en entrée, Lorsque la tension Uc sera proche de la tension de 2V le point B sera proche des 3V et nous allons arriver à la limite d'un état indéterminé ce qui donne mathématiquement :

Pour t=0 Uc=2V

$$\boxed{VB = VA - Uc(0) = 5 - 2 = 3V}$$

2. États indéterminés

Ce moment est très intéressant à analyser car comme dis précédemment lorsque Uc=2V VB=3V, puis comme nous nous retrouvons sur un état indéterminé, la tension de sortie du U1:C se retrouve à 2,5V cette sortie étant relié à l'entrée du U1:A, et que cette entrée est aussi indéterminé, la sortie du U1:A passe à l'état lui aussi indéterminé soit 2,5V, on se retrouve avec un schéma comme le montre la Figure 3.

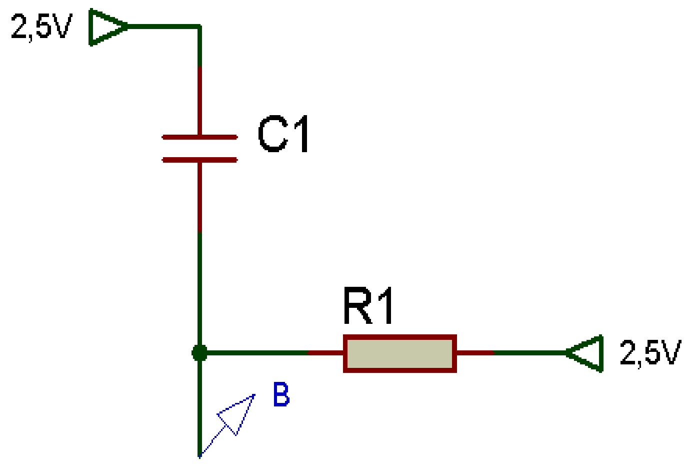


Figure 3 : *Toutes les entrées et les sorties des CD4011 sont dans un état indéterminé*

L'explication n'est pas terminée, si on refait à cet instant la loi des mailles,

$$\boxed{VB = VA - Uc(0) = 2{,}5 - 2 = 0{,}5V}$$

On remarque que très vite le potentiel du point B se retrouve à 0,5V ce qui est largement suffisant pour faire basculer l'entrée du U1:C à l'état logique de 0V, ainsi la sortie du U1:C passe à l'état logique haut (5V) qui met un niveau logique haut sur l'entrée du U1:A puis la sortie du U1:A passe à l'état logique bas (0V), ce qui nous amène au paraphe suivant

Décharge du condensateur C1

Bon ! Maintenant que nous avons vue comment s'activent les entrées du CD4011, on peut commencer à réfléchir sur la décharge du condensateur.
Pour que ce condensateur se décharge il faut donc inverser le potentiel des point A et B, oui précédemment le condensateur c'est chargé dans un sens, si nous inversons ces deux potentiel il va donc se déchargé (*ou se chargé mais dans l'autre sens tous dépend dans quel sens nous exposons le problème…*), Bref parenthèse fermé, revenons sur la décharge du condensateur voici le modèle situé sur la figure 3.

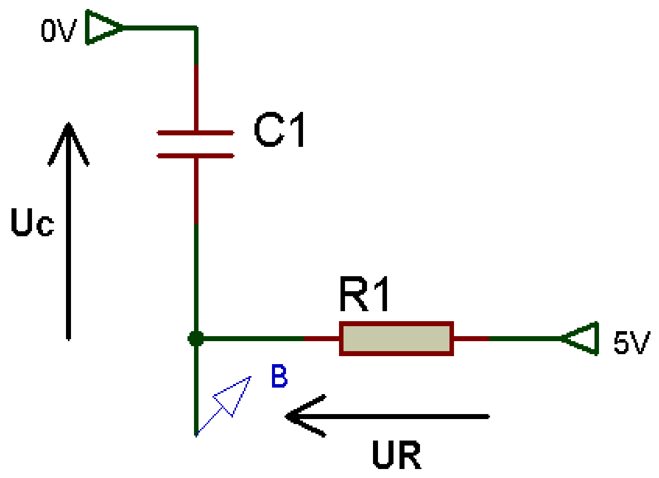


Figure 3 : *Je pense que vous avez vue rien n'a changé sauf les potentiels, que nous avons évoqué précédemment dans le paragraphe (États indéterminés)*

Sachant que ce qu'on à vue précédemment est toujours vrai le condensateur c'est chargé à 2V, cela nous donne bien 5-2=3V au point B

Les conditions initiales du condensateur à t=0 sont que Uc(t)=2V

3. Équations différentielles

$$-RC\frac{dUc}{dt} - Uc = 5V$$

On résout l'équation sans second membre ce qui donne :

$$-RC\frac{dUc}{dt} - Uc = 0 \qquad => \qquad \frac{dUc}{dt} = -\frac{1}{RC}Uc$$

La solution de l'équation différentielle linéaire sans second membre est du type :

$$\boxed{Uc = ke^{-\frac{t}{RC}} \ (avec\ k\ cst\ réelle\ quelconque)}$$

AUCUN CHANGEMENT

Maintenant nous recherchons une solution particulière qui s'annule lorsque

-RC(dUc/dt)-Uc=5V:

$Y = Ax + B$

$\frac{dY}{dt} = A$

$-RCA - Ax - B = 5V$

Il suffit que :

$$\begin{cases} -B - RCA = 5 \\ -A = 0 \end{cases} \quad => \mathbf{B= -5}$$

La solution particulière est donc Y=B= -5

Les solutions de l'équation différentielle linéaire s'obtiennent en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène une solution particulière de l'équation avec second membre.
Ce qui nous donne :

$$\boldsymbol{Uc = ke^{-\frac{t}{RC}} + Y}$$
$$\boldsymbol{Uc = ke^{-\frac{t}{RC}} - 5}$$

À t=0 nous avons Uc=2V

$\boldsymbol{2 = k - 5\ d'o\grave{u}\ k = 7}$

L'équation s'écrit :

$$\boxed{\boldsymbol{Uc(t) = 7e^{-\frac{t}{RC}} - 5}}$$

Il en résulte que le condensateur va se décharger sous cette formule, essayons maintenant de voir comment évolue le potentiel au point B :

$$\boxed{0 - Uc(t) - UR - 5 = 0 \quad => \quad VB = 5 + UR \quad => \quad 0 - \left(\boldsymbol{7e^{-\frac{t}{RC}} - 5}\right) = \boldsymbol{-7e^{-\frac{t}{RC}} + 5}}$$

Le potentiel au point B

$$\boxed{\boldsymbol{VB = -7e^{-\frac{t}{RC}} + 5}}$$

Le potentiel est important à savoir car c'est celui-ci qui va faire « basculer » l'état logique en entrée, Lorsque la tension Uc sera proche de la tension de -2V le point B sera proche des 2V et nous allons arriver à la limite d'un état indéterminé ce qui donne mathématiquement :

Pour t=0 Uc=-2V

$$\boxed{VB = VA - Uc(0) = 0 - (-2) = 2V}$$

4. États indéterminés

Encore une fois, mais cette fois-ci le condensateur se décharge

Ce moment est très intéressant à analyser car comme dis précédemment lorsque Uc= -2V VB=2V, puis comme nous nous retrouvons sur un état indéterminé, la tension de sortie du U1:C se retrouve à 2,5V cette sortie étant relié à l'entrée du U1:A, et que cette entrée est aussi indéterminé, la sortie du U1:A passe à l'état lui aussi indéterminé soit 2,5V, on se retrouve avec un schéma comme le montre la Figure 3.

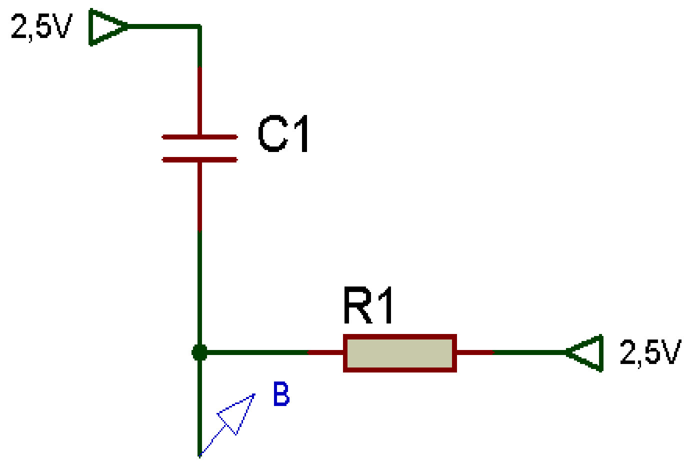


Figure 3 : *Toutes les entrées et les sorties des CD4011 sont dans un état indéterminé*

L'explication n'est pas terminée, si on refait à cet instant la loi des mailles,

$$\boxed{VB = VA - Uc(0) = 2{,}5 - (-2) = 4{,}5V}$$

On remarque très vite le potentiel du point B se retrouve à 4,5V ce qui est largement suffisant pour faire basculer l'entrée du U1:C à l'état logique de 5V, ainsi la sortie du U1:C passe à l'état logique bas (0V) qui met un niveau logique bas sur l'entrée du U1:A puis la sortie du U1:A passe à l'état logique haut (5V), ce qui nous amène au paraphe suivant,

A nouveau le condensateur C1 se charge.

$$\boldsymbol{RC\frac{dUc}{dt} + Uc = 5V}$$

On résout l'équation sans second membre ce qui donne :

$$\boldsymbol{RC\frac{dUc}{dt} + Uc = 0 \quad => \quad \frac{dUc}{dt} = -\frac{1}{RC}Uc}$$

La solution de l'équation différentielle linéaire sans second membre est du type :

$$\boxed{\boldsymbol{Uc = ke^{-\frac{t}{RC}}}\ (avec\ k\ cst\ réelle\ quelconque)}$$

Maintenant nous recherchons une solution particulière qui s'annule lorsque RC(dUc/dt)+Uc=5V:

$Y = Ax + B$

$\frac{dY}{dt} = A$

$RCA + Ax + B = 5V$

Il suffit que :

$$\begin{cases} B + RCA = 5 \\ A = 0 \end{cases} \quad => \textbf{B=5}$$

La solution particulière est donc Y=B=5

Les solutions de l'équation différentielle linéaire s'obtiennent en ajoutant à la solution générale de l'équation homogène une solution particulière de l'équation avec second membre.
Ce qui nous donne :

$$\boldsymbol{Uc = ke^{-\frac{t}{RC}} + Y}$$
$$\boldsymbol{Uc = ke^{-\frac{t}{RC}} + 5}$$

À t=0 nous avons Uc= -2V

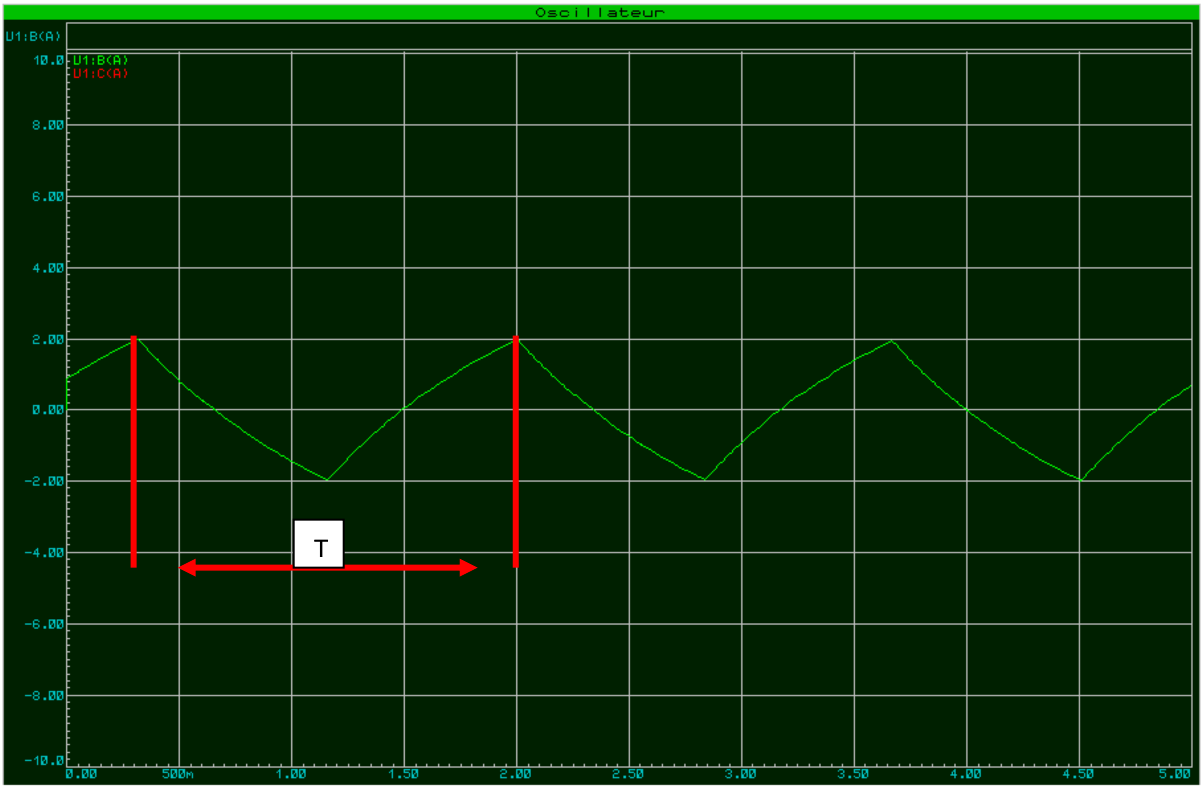
$\boldsymbol{-2 = k + 5\ d'où\ k = -7}$

L'équation s'écrit :

$$\boxed{\boldsymbol{Uc(t) = -7e^{-\frac{t}{RC}} + 5}}$$

Etc… et ceci peut durer l'infini mais pas la force d'aller jusqu'à ce que le composant s'use ☺…..

5. Récapitulations



Prenons le signal sur une période T

Puis lorsque Uc=2V la sortie du U1:A passe à l'état (0) logique et le condensateur C1 à t=0 Uc=2V, va se décharger => $\boldsymbol{Uc(t) = 7e^{-\frac{t}{RC}} - 5}$ **(1)**

Puis lorsque Uc= -2V la sortie du U1:A passe à l'état (5) logique et le condensateur C1 à t=0 Uc= -2V, il va donc se charger =>$\boldsymbol{Uc(t) = -7e^{-\frac{t}{RC}} + 5}$ **(2)**

7 Calcul de la fréquence

Une période T correspond à la décharge du condensateur plus la charge du condensateur (voir graphe au paragraphe (Récapitulations).

Prenons la décharge formule (1) :

Lorsque le condensateur se décharge il faut que sa tension arrive à Uc(t)= -2V pour que le basculement change d'état ce qui donne ce résultat

$$\boldsymbol{t1 = 0,847 \times RC}$$

Prenons la charge formule (2) :

Lorsque le condensateur se charge il faut que sa tension arrive à Uc(t)= 2V pour que le basculement change d'état ce qui donne :

$$\boldsymbol{t2 = 0,847 \times RC}$$

Pour calculer la période il suffit d'additionner ces deux temps $\boldsymbol{T = t1 + t2}$

$$\boldsymbol{T = 1,694 \times RC}$$

On en déduit F :

$$\boxed{F = \frac{1}{\boldsymbol{1,694 \times RC}} \cong \frac{1}{\boldsymbol{1,70 \times RC}}}$$