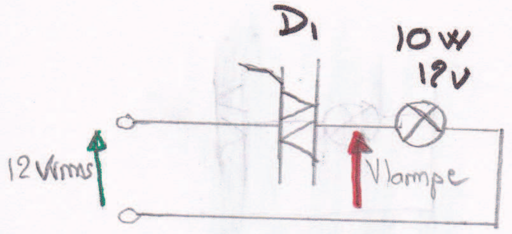
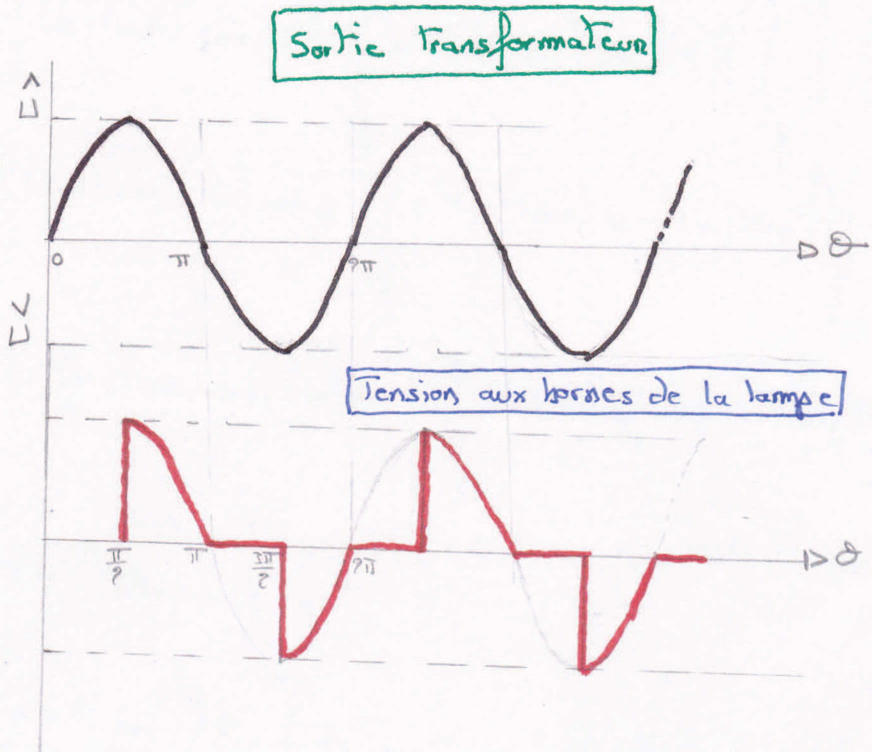
Les Harmoniques

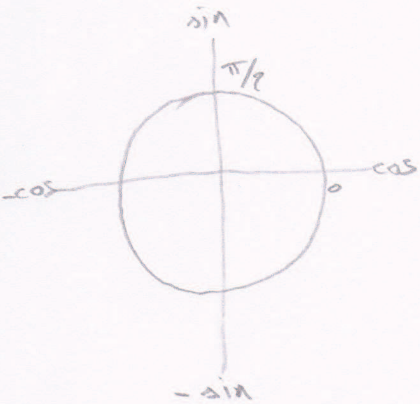




$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Calculs de la valeur moyenne a_0

$$a_0 = \frac{1}{T}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(t)\,dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(t)\,dt\right] = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \hat{U}\sin(\omega t)\,dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \hat{U}\sin(\omega t)\,dt\right]$$



$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left[-\frac{\hat{U}}{\omega}\cos(\omega t)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[-\frac{\hat{U}}{\omega}\cos(\omega t)\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left[-\hat{U}\cos(t)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \left[-\hat{U}\cos(t)\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\hat{U}\cos(\pi) + \hat{U}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \hat{U}\cos(2\pi) + \hat{U}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\hat{U}}{2\pi}\left[-\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(2\pi) + \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\hat{U}}{2\pi}\left[1 + 0 - 1 + 0\right]$$

$\boxed{a_0 = 0}$ Valeur moyenne du signal nul

Pour finir :

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(\omega t)\cos(n\omega t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)\cos(nt)\,dt$$

$$= -\frac{1}{n}\left[\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{n}\cos(n\pi) - \frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t\cos(nt)\,dt\right]$$

$$= -\frac{1}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2}\cos(n\pi) + \frac{1}{n^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t\cos(nt)\,dt$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)\cos(nt)\,dt\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = -\frac{1}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2}\cos n\pi.$$

$$\boxed{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)\cos(nt)\,dt = \left[-\frac{1}{n}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2}\cos(n\pi)\right] \times \frac{n^2}{n^2-1}.}$$

Por simplification : $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)\cos(nt) = -\left[\frac{\cos n\pi + \sin n\frac{\pi}{2}\cdot N}{N^2-1}\right]$

on remplace $n = 2p$. avec (n paire)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)\cos(nt)\,dt = \left[-\frac{1}{2p}\underbrace{\sin(\pi p)}_{=0} - \frac{1}{4p^2}\underbrace{\cos(2\pi p)}_{=1}\right]\frac{4p^2}{4p^2-1}$$

$$\boxed{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)\cos(nt)\,dt = -\frac{1}{4p^2-1}.}$$

pour les nombres paires
lorsque "n" est paire

on remplace $n = 2p+1$ avec (n impaire)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)\cos(nt)\,dt = \left[-\frac{1}{2p+1}\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{(2p+1)^2}\cos\left((2p+1)\pi\right)\right]\frac{(2p+1)^2}{(2p+1)^2-1}$$

$$\boxed{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)\cos(nt)\,dt = \left[-\frac{1}{2p+1}\cdot(-1)^p + \frac{1}{(2p+1)^2}\right]\frac{(2p+1)^2}{(2p+1)^2-1}}$$

pour les nombra impaires
lorsque "n" est impaires
$p \neq 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \hat{U}\sin(\omega t)\cos(n\omega t)\,dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \hat{U}\sin(\omega t)\cos(n\omega t)\,dt \right]$$

$$a_n = \frac{\hat{U}}{\pi}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(\omega t)\cos(n\omega t)\,dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(\omega t)\cos(n\omega t)\,dt \right]$$

$$a_n = \frac{\hat{U}}{\pi}\left[\underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)\cos(nt)\,dt}_{\text{Voir p III calculé}} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\cos(nt)\,dt \right]$$

1^{er} intégration par partie de $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\cos(nt)\,dt$

$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\cos(nt)\,dt \longrightarrow$ on pose $u(t) = \sin t$ et $v'(t) = \cos(nt)$

$u'(t) = \cos t$ et $v(t) = \frac{1}{n}\sin(nt)$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\cos(nt)\,dt = \left[\frac{1}{n}\sin(t)\sin(nt)\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(t)\sin(nt)\,dt.$$

$$= \frac{1}{n}\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0}\sin(n2\pi) - \frac{1}{n}\underbrace{\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=-1}\sin\left(n\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{1}{n}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(t)\sin(nt)\,dt.$$

$$= \frac{1}{n}\sin\left(n\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{1}{n}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(t)\sin(nt)\,dt.$$

$$= -\frac{1}{n}\left[-\sin\left(n\frac{3\pi}{2}\right) + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(t)\sin(nt)\,dt\right]$$

$2^{ème}$ intégration par partie de $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(t)\sin(nt)\,dt$

$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(t)\sin(nt)\,dt \longrightarrow$ on pose $u(t) = \cos t$ $v'(t) = \sin(nt)$

$u'(t) = -\sin t$ $v(t) = -\frac{1}{n}\cos(nt)$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(t)\sin(nt)\,dt = \left[-\frac{1}{n}\cos t\cos(nt)\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} - \frac{1}{n}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\cos(nt)\,dt.$$

$$= -\frac{1}{n}\cos(2\pi)\cos(n2\pi) + \frac{1}{n}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cos\left(n\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{1}{n}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\cos(nt)\,dt.$$

$$= -\frac{1}{n}\cos(n2\pi) - \frac{1}{n}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\cos(nt)\,dt$$

Pour finir :

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\cos(nt)\,dt = -\frac{1}{n}\left[-\sin\left(n\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{n}\cos(n2\pi) - \frac{1}{n}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin(t)\cos(nt)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sin\left(n\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\cos(n2\pi) + \frac{1}{n^2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin(t)\cos(nt)\,dt$$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin(t)\cos(nt)\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n}\sin\left(n\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\cos(n2\pi)$$

$$\boxed{\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin(t)\cos(nt) = \left[\frac{1}{n}\sin\left(n\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\cos(n2\pi)\right]\cdot\frac{n^2}{n^2-1}}$$

Par simplification $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin(t)\cos(nt) = \frac{1}{n^2-1}\left[n\sin\left(n\frac{3\pi}{2}\right) + \cos(n2\pi)\right]$

on remplace $n = 2p$ avec ("n" paire)

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin(t)\cos(nt) = \left[\frac{1}{2p}\underbrace{\sin\left(2p\frac{3\pi}{2}\right)}_{=0} + \frac{1}{4p^2}\cos(2p\,2\pi)\right]\frac{4p^2}{4p^2-1}.$$

$$\boxed{\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin(t)\cos(nt) = \frac{1}{4p^2-1}}$$

pour les nombres paires
lorsque "n" est paire

on remplace $n = 2p+1$ avec ("n" impaire)

$$\boxed{\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin(t)\cos(nt) = \left[\frac{1}{2p+1}\sin\left((2p+1)\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{(2p+1)^2}\cos\left((2p+1)2\pi\right)\right]\frac{(2p+1)^2}{(2p+1)^2-1}}$$

pour les nombres impaires
lorsque "n" est impaire
$p \neq 0$

Conclusions du calculs

Pour l'integral $a_n = \frac{\hat{U}}{\pi}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)\cos(nt)\,dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\cos(nt)\,dt\right]$

$\rightarrow$ Pour les "n" paires $\boxed{a_n = 0}$ $(n = 2p)$

$\rightarrow$ Pour les "n" impaires sauf $n=1$ à calculer seul car $p \neq 0$

$$\boxed{a_{n>1} = \frac{2p+1}{(2p+1)^2-1}\left[\frac{2}{2p+1} + \sin\left((2p+1)\frac{3\pi}{2}\right) - (-1)^p\right]} \quad (n = 2p+1)$$

Calcul pour $n=1$: avec $a_n = a_1' + a_1''$

$a_1' = \frac{\hat{U}}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t \cos t\,dt \rightarrow$ $u(t) = \sin t$ $v'(t) = \cos t$; $u'(t) = \cos t$ $v(t) = \sin t$

$a_1' = \left[\left[\sin t \cdot \sin t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t \sin t\,dt\right]$

$a_1' = \left[\left[\sin^2\pi - \sin^2\frac{\pi}{2}\right] - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t \sin t\,dt\right]$

$a_1' = \left[-\sin^2\frac{\pi}{2} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t \sin t\,dt\right]$

$a_1' = -\sin^2\frac{\pi}{2} - a_1' \rightarrow a_1'[2] = -\sin^2\frac{\pi}{2}$

$a_1' = -\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi}{2}.$

$a_1' = -\frac{1}{2}$

$a_1'' = \frac{\hat{U}}{\pi}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\cos(t)\,dt$

$a_1'' = -\sin^2\frac{3\pi}{2} - a_1'' \rightarrow a_1''[2] = -\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$a_1'' = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

$a_1'' = -\frac{1}{2}.$

$a_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$

$\boxed{a_1 = -\frac{\hat{U}}{\pi}}$ $\boxed{a_2 = 0}$ $\boxed{a_3 = \frac{\hat{U}}{\pi}}$ $\boxed{a_4 = 0}$ $\boxed{a_5 = -\frac{\hat{U}}{3\pi}}$ $\boxed{a_6 = 0}$ $\boxed{a_7 = \frac{\hat{U}}{3\pi}}$

$\boxed{a_8 = 0}$ $\boxed{a_9 = -\frac{\hat{U}}{5\pi}}$ $\boxed{a_{10} = 0}$ $\boxed{a_{11} = \frac{\hat{U}}{5\pi}}$ $\boxed{a_{12} = 0}$ $\boxed{a_{13} = -\frac{\hat{U}}{7\pi}}$ $\boxed{a_{14} = 0}$

Calculs du coefficient de Fourrier b_n

$$b_n = \frac{2}{T}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(t)\sin(n\omega t)\,dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(t)\sin(n\omega t)\,dt\right]$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt\right] \qquad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = 1$$

1^{er} integration par partie de $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt \longrightarrow$ on pose $u(t) = \sin t$ et $v'(t) = \sin(nt)$

$u'(t) = \cos t$ et $v(t) = -\frac{1}{n}\cos(nt)$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt = \left[-\frac{1}{n}\sin t\cos(nt)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t\cos(nt)\,dt.$$

$$= \left[-\frac{1}{n}\underbrace{\sin(\pi)}_{=0}\cos(n\pi) + \frac{1}{n}\underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right] + \frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t\cos(nt)\,dt.$$

$$= \frac{1}{n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t\cos(nt)\,dt.$$

$2^{ème}$ integration par partie de $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t\cos(nt)\,dt.$

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t\cos(nt) \longrightarrow$ on pose $u(t) = \cos t$ et $v'(t) = \cos(nt)$

$u'(t) = -\sin t$ et $v(t) = \frac{1}{n}\sin(nt)$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos t\cos(nt) = \left[\frac{1}{n}\cos t\sin(nt)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t\sin(nt)\,dt.$$

$$= \left[\frac{1}{n}\underbrace{\cos(\pi)}_{=-1}\sin(n\pi) - \frac{1}{n}\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=0}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right] + \frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t\sin(nt)\,dt.$$

$$= -\frac{1}{n}\sin(n\pi) + \frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t\sin(nt)\,dt.$$

Pour finir

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt = \frac{1}{n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2}\sin(n\pi) + \frac{1}{n^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t \sin(nt)\,dt.$$

$$= \frac{1}{n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2}\sin(n\pi) + \frac{1}{n^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t \sin(nt)\,dt.$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)\sin(nt)\left[1 - \frac{1}{n^2}\right] = \frac{1}{n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2}\sin(n\pi)$$

$$\boxed{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)\sin(nt) = \left[\frac{1}{n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{n^2}\sin(n\pi)\right]\frac{n^2}{n^2-1}}$$

Par simplification $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)\sin(nt) = \left[n\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) - \sin(n\pi)\right]\frac{1}{n^2-1}$

on remplace $n = 2p$ avec ("n" paire)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t \sin(nt) = \left[2p\cos(\pi p) - \sin(2\pi p)\right]\frac{1}{4p^2-1}.$$

$$= \left[2p(-1)^p\right].\frac{1}{4p^2-1}.$$

$$\boxed{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t \sin(nt) = \frac{1}{4p^2-1}\left[2p(-1)^p\right]}$$ pour les nombres paires lorsque "n" est paire $p \neq 0$

on remplace $n = 2p+1$ avec ("n" impaire)

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t \sin(nt) = \left[\frac{1}{2p+1}\cos\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{(2p+1)^2}\sin\left((2p+1)\pi\right)\right]\frac{(2p+1)^2}{(2p+1)^2-1}$$

$$= \left[(2p+1)\underbrace{\cos\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \sin\left((2p+1)\pi\right)\right]\frac{1}{(2p+1)^2-1}$$

$$\boxed{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin t \sin(nt) = 0}$$ nul pour des nombres impaires sauf pour $p \neq 0$ (valeur interdite)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \underbrace{\sin(t)\sin(nt)\,dt}_{\text{Voir p }\underline{\text{VIII}}\text{ calculé}} + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt \right]$$

$1^{ère}$ intégration par partie de $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt$

$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\sin(nt) \longrightarrow$ on pose $\quad u(t) = \sin(t)$ et $v'(t) = \sin(nt)$

$u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = -\frac{1}{n}\cos(nt)$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\sin(nt) = \left[-\frac{1}{n}\sin(t)\cos(nt)\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(t)\cos(nt)\,dt.$$

$$= \left[-\frac{1}{n}\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0}\cos(n2\pi) + \frac{1}{n}\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cos\left(n\frac{3\pi}{2}\right)\right] + \frac{1}{n}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(t)\cos(nt)\,dt.$$

$$= -\frac{1}{n}\cos\left(n\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{n}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(t)\cos(nt)\,dt.$$

$2^{ème}$ intégration par partie de $\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(t)\cos(nt)\,dt.$

$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(t)\cos(nt)\,dt \longrightarrow$ on pose $\quad u(t) = \cos(t)$ et $v'(t) = \cos(nt)$

$u'(t) = -\sin(t)$ et $v(t) = \frac{1}{n}\sin(nt)$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(t)\cos(nt)\,dt = \left[\frac{1}{n}\cos(t)\sin(nt)\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt.$$

$$= \left[\frac{1}{n}\underbrace{\cos(2\pi)}_{=1}\sin(n2\pi) - \frac{1}{n}\underbrace{\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)}_{=0}\sin\left(n\frac{3\pi}{2}\right)\right] + \frac{1}{n}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt.$$

$$= \frac{1}{n}\sin(n2\pi) + \frac{1}{n}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt$$

Pour finir

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt = -\frac{1}{n}\cos\left(n\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\sin(n2\pi) + \frac{1}{n^2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\sin(t)\sin(nt)\,dt.$$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt\left[1-\frac{1}{n^2}\right] = -\frac{1}{n}\cos\left(n\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\sin(n2\pi)$$

$$\boxed{\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt = \left[-\frac{1}{n}\cos\left(n\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{1}{n^2}\sin(n2\pi)\right]\frac{n^2}{n^2-1}.}$$

Par simplification $\displaystyle\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt = -\left[n\cos\left(n\frac{3\pi}{2}\right) - \sin(n2\pi)\right] \times \frac{1}{n^2-1}$

on remplace $n = 2p$ avec "n" paires

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt = -\left[2p\cos\left((2p)\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\left((2p)2\pi\right)\right] \times \frac{1}{4p^2-1}$$

$$= -\left[\frac{2p\cdot(-1)^p}{4p^2-1}\right]$$

$$\boxed{\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt = -\left[\frac{2p\cdot(-1)^p}{4p^2-1}\right]}$$ Pour les nombres paires lorsque "n" est paire

on remplace $n = 2p+1$ avec "n" impaires

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt = -\left[(2p+1)\underbrace{\cos\left((2p+1)\frac{3\pi}{2}\right)}_{=0} - \sin\left((2p+1)2\pi\right)\right] \times \frac{1}{(2p+1)^2-1}$$

$$= -\left[-\sin\left((2p+1)2\pi\right)\right] \times \frac{1}{(2p+1)^2-1}$$

$$\boxed{\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt = \frac{\sin\left((2p+1)2\pi\right)}{(2p+1)^2-1} = 0}$$ Pour les nombres impaires lorsque "n" est impaire sauf pour $p \neq 0$

onclusions du calculs

Pour l'intégral $b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin(t)\sin(nt)\,dt\right]$

→ pour les "n" paires

$$b_{n>1} = \frac{2p.(-1)^p}{4p^2-1} - \frac{2p.(-1)^p}{4p^2-1} = 0 \rightarrow b_{n>1} = 0$$

→ pour les "n" impaires

$$b_{n>1} = 0 + 0 \rightarrow b_{n>1} = 0$$

Tous les $b_{n>1}$ sont nul sauf en 1.

Calcul pour b_n avec "n" = 1 avec $a_n = a_1' + a_1''$

$$a_1' = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t)\sin(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2(t)\,dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\,dt.$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 1 - \cos(2t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \left[\left(\pi - \frac{1}{2}\underbrace{\sin(2\pi)}_{=0}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin(\pi)\right)\right] \times \frac{1}{2}$$

$$= \left[\pi - \frac{\pi}{2}\right]\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$a_1'' = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \frac{1}{2} - \frac{\cos(2t)}{2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} 1 - \cos(2t)\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \frac{1}{2}\left[\left(2\pi - \frac{1}{2}\underbrace{\sin(\pi)}_{=0}\right) - \left(\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{2}\underbrace{\sin(3\pi)}_{=0}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\pi - \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = a_1' + a_1'' = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \longrightarrow \boxed{b_1 = \frac{\pi}{2}}$$

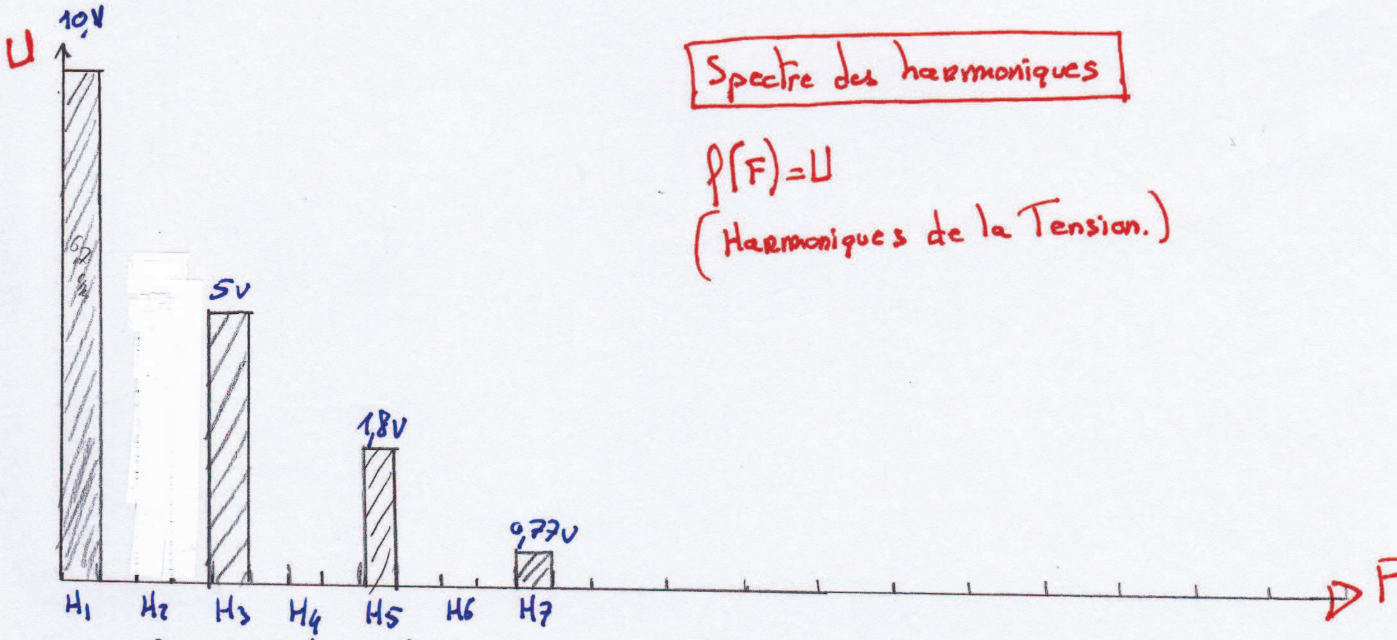
Développement en série de Fourrier :

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega T) + b_n \sin(n\omega t) \right)$$

$$\boxed{f(t) = 0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{U}{\pi} \left[-\cos(nT) + \frac{\pi}{2} \sin(n t) + \cos(3T) - \frac{1}{3} \cos(5T) + \frac{1}{3} \cos(7T) - \frac{1}{5} \cos(9T) + \frac{1}{5} \cos(11T) - \frac{1}{7} \cos(13T) \right] \right)}$$

Formule de Parseval :

Amplitude du signal $A_n^2 = a_n^2 + b_n^2$



Calcul de la valeur efficace du signal :

$$\frac{1}{T} \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(t)^2 \, dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} f(t)^2 \, dt \right] = \frac{1}{T} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(12\sqrt{2} \sin(t) \right)^2 dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \left(12\sqrt{2} \sin(t) \right)^2 dt$$

$$= \frac{(12\sqrt{2})^2}{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin^2(t) \, dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sin^2(t) \, dt$$

$$V_{eff} \approx 8{,}48 \, V \text{ pour } \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\boxed{f(t)^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2 \right) = 0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{12\sqrt{2}}{\pi} \right)^2 \left[(-1)^2 + \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 + (1)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{5} \right)^2 \cdots \right.}$$

L'ampoule utilisée est une ampoule de 12 V pour 10 W avec une résistance de 3Ω (mesurée à l'ohmètre).

$$i_{eff}^2 = \frac{1}{T}\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left[\frac{U}{R}\sin(\omega t)\right]^2 dt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\left[\frac{U}{R}\sin(\omega t)\right]^2 dt.\right] \simeq 7{,}82\,A$$

$$i_{eff}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{U}{R\pi}\right)^2\left[(a_1)^2 + (b_1)^2 + (a_3)^2 + (a_5)^2 + (a_7)^2 \dots\right]\right]$$

$$= 0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{12\sqrt{2}}{3\pi}\right)^2\left[(-1)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + (1)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \left(\frac{1}{7}\right)^2\right]\right]$$

$$i_{eff}^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[3{,}24\left[4{,}81\right]\right]$$

$$i_{eff}^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \simeq 15{,}6$$

$$i_{eff}^2 = 7{,}8\,A$$

$i_{eff} = 2{,}8\,A.$ proche des $2{,}82\,A$

il en résulte que avec des harmoniques. le courant consommé par l'ampoule n'est pas égale à $P = U \times I \rightarrow I = \frac{P}{U} = \frac{10}{12} = 0{,}833\,A$.