

LES TRAINS D'ENGRENAGES

1. INTRODUCTION

Les trains d'engrenages sont utilisés dans une grande quantité de machines et mécanismes divers. Une machine est souvent constituée d'un ensemble moteur et d'un ensemble récepteur. On appelle chaîne cinématique, la chaîne de transmission de mouvement partant du moteur et allant jusqu'au récepteur.

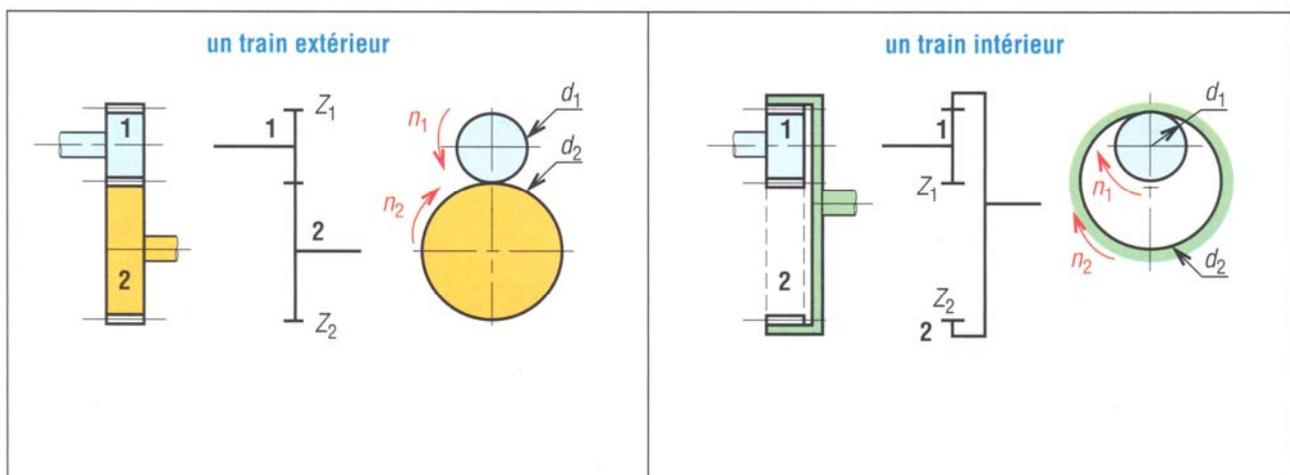
Les trains d'engrenage font souvent partie intégrante de cette chaîne cinématique. Ils ont pour fonction d'adapter la fréquence de rotation entre le moteur et le récepteur.

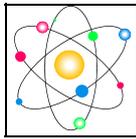


2. LES ENGRENAGES

Les trains d'engrenages sont souvent constitués d'engrenages cylindriques. Mais il faudra distinguer :

- Les engrenages à contact EXTERIEURS.
- Les engrenages à contact INTERIEURS.





3. RAPPORT DE TRANSMISSION D'UN TRAIN D'ENGRENAGE.

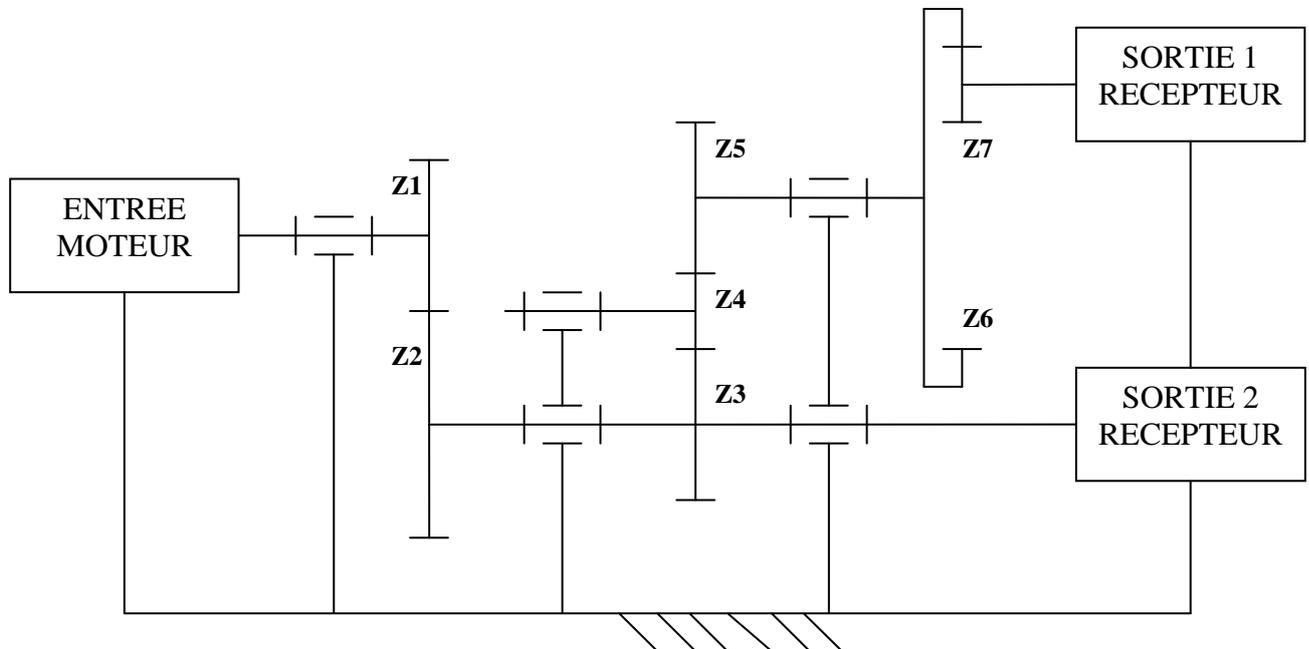
Un train d'engrenages comporte une **ENTREE**, liée au **MOTEUR** et une (ou plusieurs) **SORTIE** liée au **RECEPTEUR**.

On appelle **RAPPORT DE TRANSMISSION** noté « i » le rapport entre la fréquence de rotation à la sortie du train par la fréquence de rotation à l'entrée.

$$\text{Rapport de transmission} \quad i = \frac{\omega_{\text{sortie}}}{\omega_{\text{entrée}}} = \frac{N_{\text{sortie}}}{N_{\text{entrée}}}$$

Avec « ω » en rad/s et « N » en trs/mn

a. Calcul des rapports de transmission du train d'engrenages suivant :



On donne :

Fréquence de rotation du moteur N entrée = 1500 trs/mn

$$Z1 = 30 \text{ dts}$$

$$Z2 = 40 \text{ dts}$$

$$Z3 = 28 \text{ dts}$$

$$Z4 = 18 \text{ dts}$$

$$Z5 = 32 \text{ dts}$$

$$Z6 = 122 \text{ dts}$$

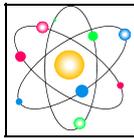
$$Z7 = 19 \text{ dts}$$

Dans notre exemple, le train comporte :

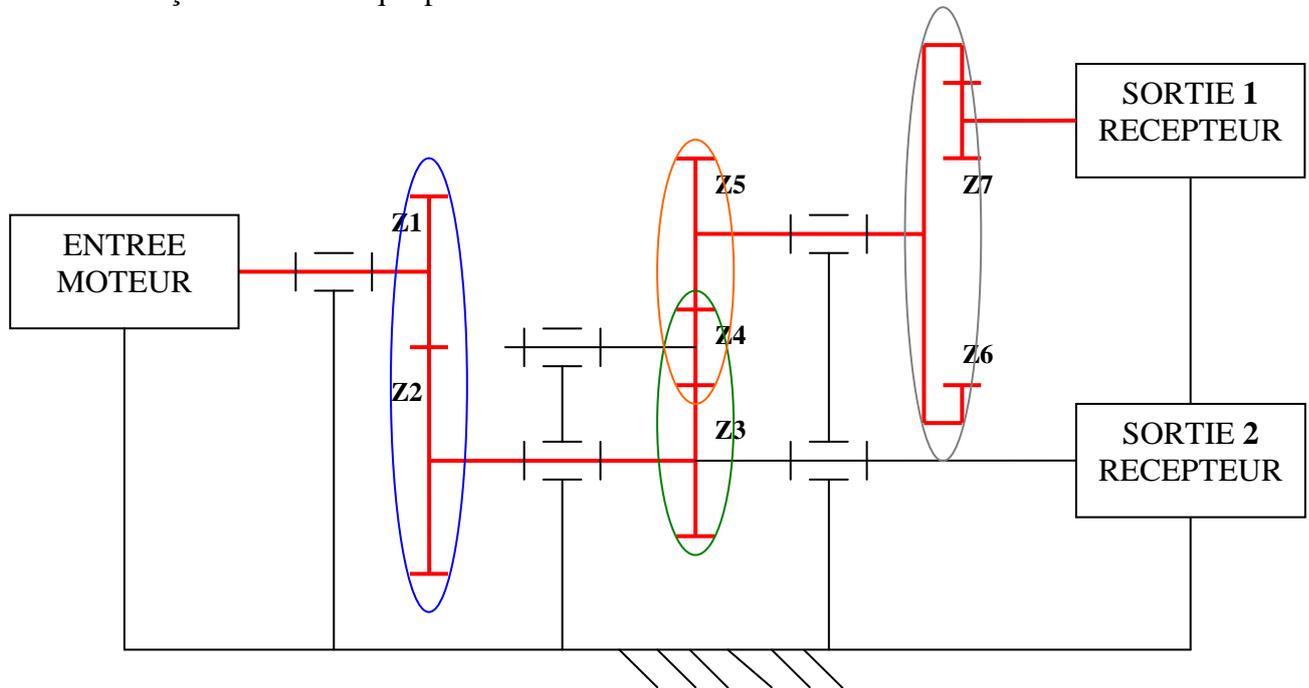
- Une entrée MOTEUR
- Une sortie 1 pour entraîner un récepteur 1
- Une sortie 2 pour entraîner un récepteur 2

La chaîne cinématique est différente selon que l'on étudie la transmission de mouvement entre :

- Le moteur et la sortie 1 (calcul du rapport de transmission $\frac{\omega_{\text{sortie 1}}}{\omega_{\text{entrée}}}$)
- Le moteur et la sortie 2 (calcul du rapport de transmission $\frac{\omega_{\text{sortie 2}}}{\omega_{\text{entrée}}}$)

**b. Etude de la chaîne cinématique entre le moteur et la sortie 1:**

Traçons le chemin que parcourt le mouvement.



La chaîne cinématique est constituée de 4 engrenages

- L'engrenage extérieur constitué du pignon « 1 » et de la roue « 2 ».
- L'engrenage extérieur constitué du pignon « 4 » et de la roue « 3 ».
- L'engrenage extérieur constitué du pignon « 4 » et de la roue « 5 ».
- L'engrenage intérieur constitué du pignon « 7 » et de la roue intérieure « 6 ».

Pour chaque engrenage il faudra identifier :

- L'élément MENANT ou moteur (qui provoque le mouvement de rotation).
- L'élément MENE (qui reçoit son mouvement de rotation de l'élément moteur)

Pour l'exemple ci-dessus :

- Engrenage « 1-2 » « 1 » est MENANT et « 2 » est MENE.
- Engrenage « 3-4 » « 3 » est MENANT et « 4 » est MENE.
- Engrenage « 4-5 » « 4 » est MENANT et « 5 » est MENE.
- Engrenage « 6-7 » « 6 » est MENANT et « 7 » est MENE.

Relation permettant de calculer un rapport de transmission.

Le rapport de transmission d'un train d'engrenage est donné par la relation suivante :

$$i = \frac{\omega_{\text{sortie}}}{\omega_{\text{entrée}}} = \frac{N_{\text{sortie}}}{N_{\text{entrée}}} = (-1)^K \cdot \frac{(\text{produit des nombres de dents des roues MENANTES})}{(\text{produit des nombres de dents des roues MENEES})}$$

	TERMINALE S.T.I.	CHAINES CINEMATIQUES LES TRAINS D'ENGRENAGES Construction	4 / 10
	Jardin-Nicolas Hervé http://perso.orange.fr/herve.jardin-nicolas/		trains d'engrenages

Avec « K » : nombre d'engrenages à contacts EXTERIEURS.

La valeur de « K » permet de déterminer le signe du rapport de transmission « i ».

- Si « i » est positif → L'arbre de sortie tourne dans le **même sens** que l'arbre d'entrée.
- Si « i » est négatif → L'arbre de sortie tourne dans le **sens inverse** de l'arbre d'entrée.

Pour notre exemple :

- Comme Z1, Z2, Z3, ... sont les nombres de dents des éléments 1, 2, 3, ...
- Comme le train comporte « **3 engrenages extérieurs** » alors « K = 3 ».
- Comme les éléments MENANTS sont les pièces 1, 3, 4, 6
- Comme les éléments MENES sont les pièces 2, 4, 5, 7

Le rapport de transmission est le suivant :

$$i = \frac{\omega_{sortie1}}{\omega_{entrée}} = \frac{N_{sortie1}}{N_{entrée}} = (-1)^3 \cdot \frac{(Z1.Z3.Z4.Z6)}{(Z2.Z4.Z5.Z7)}$$

Nous constatons que le pignon « 4 » est à la fois MENANT et MENE, sa présence ne modifie pas le rapport de transmission « i » en valeur absolue mais seulement son signe, c'est à dire le sens de rotation de l'arbre de sortie.

En effet : la présence du pignon « 4 » implique que « K = 3 » → $(-1)^3 = -1$ → sens de rotation inversé.

Alors que : l'absence du pignon « 4 » implique que « K = 2 » → $(-1)^2 = 1$ → même sens de rotation.

Application numérique.

$$i = \frac{\omega_{sortie1}}{\omega_{entrée}} = \frac{N_{sortie1}}{N_{entrée}} = (-1)^3 \cdot \frac{(30.28.122)}{(40.32.19)} = -\frac{102480}{24320} = -\frac{1281}{304} \approx -4.2138$$

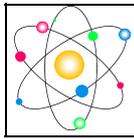
Un rapport de transmission est toujours donné en valeur exacte sous forme de fraction

Le signe « - » indique que l'arbre de sortie tourne dans le sens opposé à celui de l'arbre d'entrée.

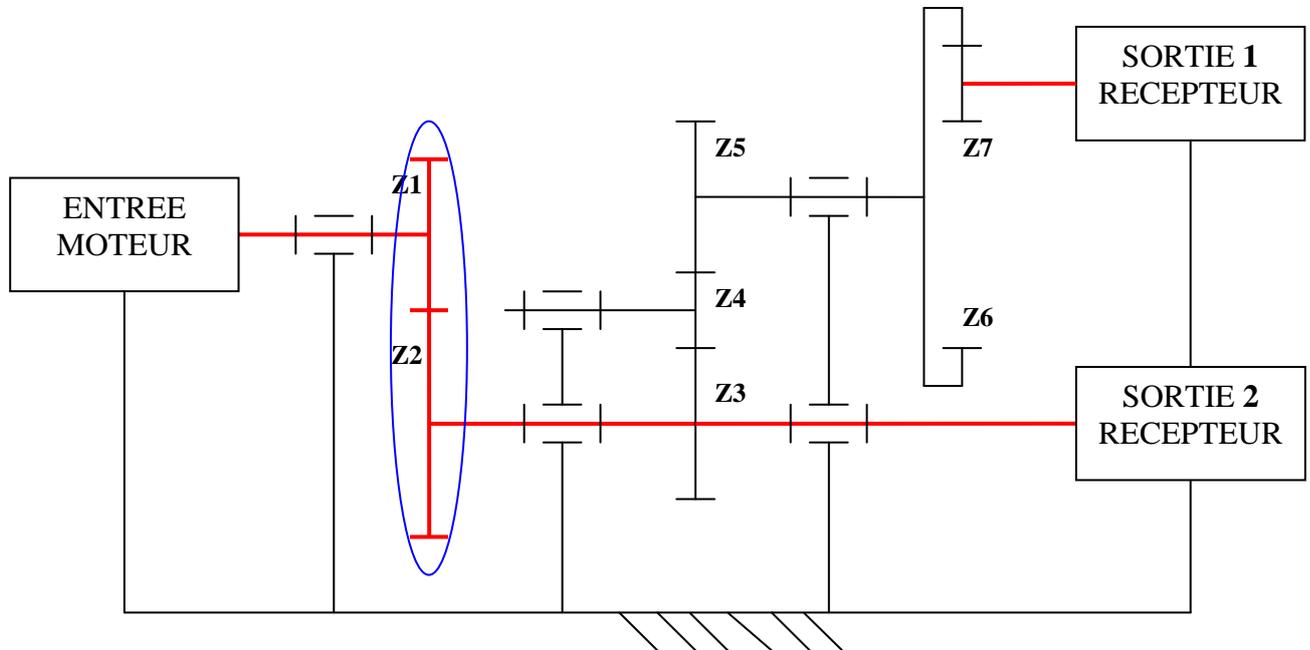
Connaissant la fréquence de rotation du moteur, calculons la fréquence de rotation de l'arbre de sortie « 1 ».

$$\frac{N_{sortie1}}{N_{entrée}} = \frac{N_{sortie1}}{1500} = \frac{1281}{304} \rightarrow N_{sortie1} = \frac{1500.1281}{304} \approx 6320.7$$

$N_{sortie1} \approx 6320.7 \text{ trs / min}$

**c. Etude de la chaîne cinématique entre le moteur et la sortie 2:**

Traçons le chemin que parcourt le mouvement.



La chaîne cinématique est constituée d'un seul engrenage.

- L'engrenage extérieur constitué de du pignon « 1 » et de la roue « 2 »

Pour cette chaîne cinématique :

- Le train comporte « 1 engrenage extérieur » alors « $K = 1$ ».
- L'élément MENANT est le pignon 1
- L'élément MENE est la roue 2

Le rapport de transmission est le suivant :

$$i = \frac{\omega_{\text{sortie 2}}}{\omega_{\text{entrée}}} = \frac{N_{\text{sortie 2}}}{N_{\text{entrée}}} = (-1)^1 \cdot \frac{(Z1)}{(Z2)} = -\frac{30}{40} = -\frac{3}{4} \approx -0.75$$

Avec $\omega_{\text{sortie 2}}$ opposé à $\omega_{\text{entrée}}$

La fréquence de rotation de l'arbre de sortie « 2 ».

$$\frac{N_{\text{sortie 2}}}{N_{\text{entrée}}} = \frac{N_{\text{sortie 2}}}{1500} = \frac{3}{4} \quad \rightarrow \quad N_{\text{sortie 2}} = \frac{1500 \cdot 3}{4} = 1125$$

$$N_{\text{sortie 2}} \approx 1125 \text{ trs / min}$$

	TERMINALE S.T.I.	CHAINES CINEMATIKUES LES TRAINS D'ENGRENAGES Construction	6 / 10
	Jardin-Nicolas Hervé http://perso.orange.fr/herve.jardin-nicolas/		trains d'engrenages

4. TRANSMISSION DE PUISSANCE A TRAVERS UN TRAIN D'ENGRENAGE.

a. Puissance d'entrée et de sortie d'une chaîne cinématique :

Les trains d'engrenages transmettent la puissance du moteur situé à l'entrée jusqu'au récepteur situé à la sortie.

1. La puissance fournie par le moteur à l'arbre d'entrée « P_{moteur} » est donnée par la relation suivante :

$$P_{moteur} = C_{moteur} \cdot \omega_{moteur}$$

Avec :

- P_{moteur} : Puissance fournie par le moteur à l'arbre d'entrée de la chaîne cinématique en **Watt**.
- C_{moteur} : Couple fourni par le moteur à l'arbre d'entrée de la chaîne cinématique en **N.m**.
- ω_{moteur} : Fréquence de rotation du moteur (arbre d'entrée) en **rad/s**

Attention : La puissance fournie par un moteur n'est pas à confondre avec sa puissance maxi.

Exemple : A 50 km/h le moteur d'une voiture fourni une puissance beaucoup plus faible que sa puissance maxi

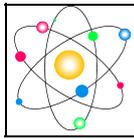
La plupart du temps c'est la machine réceptrice qui définit son besoin en puissance, c'est au moteur et au train d'engrenage de satisfaire ce besoin.

2. De même, la puissance disponible pour le récepteur à la sortie de la chaîne cinématique « $P_{récepteur}$ » est donnée par la même relation.

$$P_{récepteur} = C_{résistant} \cdot \omega_{sortie}$$

Avec :

- $P_{récepteur}$: Puissance utile (disponible) pour le récepteur en **Watt**.
- $C_{résistant}$: Couple résistant appliqué par le récepteur sur l'arbre de sortie de la chaîne cinématique en **N.m**.
- ω_{sortie} : Fréquence de rotation de l'arbre de sortie de la chaîne cinématique en **rad/s**

**b. Rendement d'un d'engrenage:**

Un train d'engrenage est constitué d'un ou plusieurs engrenages.

Le frottement au contact entre les dents entraîne une perte de puissance.

Cette énergie perdue est transformée en chaleur.

Les calories ainsi générés sont transportés par le lubrifiant (huile ou graisse) jusqu'à la paroi du carter afin d'y être évacué par conduction dans l'atmosphère.

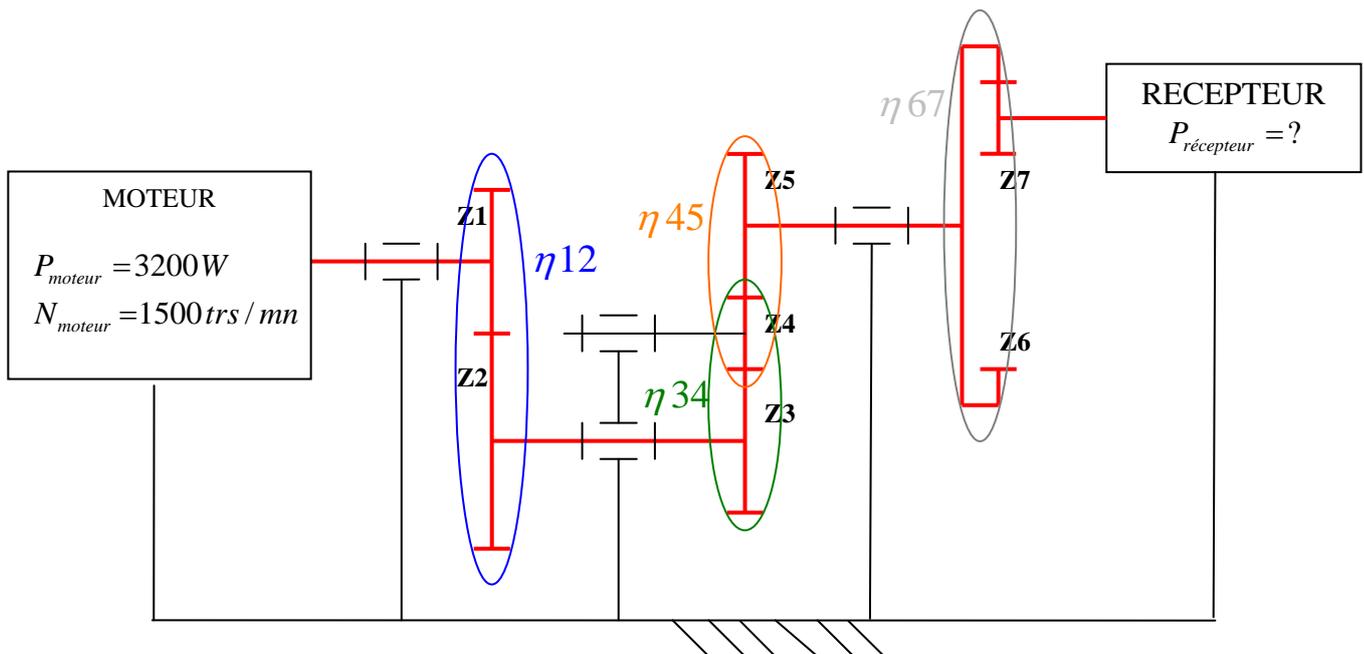
Un engrenage constitué d'un pignon « 1 » et d'une roue « 2 » aura un rendement noté η_{12}

Le rendement est proche de 100% pour les engrenages cylindriques à denture droite bien lubrifiés.

$$\eta_{12} \approx 0.98 \text{ (98\%)}$$

c. Rendement global d'un train d'engrenage:

Reprenons l'exemple précédent.



La puissance est transmise par l'intermédiaire 4 engrenages.

On donne :

- L'engrenage 1-2 de rendement $\eta_{12} = 0.9905$ (99.05%)
- L'engrenage 3-4 de rendement $\eta_{34} = 0.985$ (98.5%)
- L'engrenage 4-5 de rendement $\eta_{45} = 0.986$ (98.6%)
- L'engrenage 6-7 de rendement $\eta_{67} = 0.992$ (99.2%)

	TERMINALE S.T.I.	CHAINES CINEMATIQUES LES TRAINS D'ENGRENAGES Construction	8 / 10
	Jardin-Nicolas Hervé http://perso.orange.fr/herve.jardin-nicolas/		trains d'engrenages

Définition :

Le rendement global d'un train d'engrenage est le produit du rendement de chaque engrenage.

Pour notre exemple :

$$\eta_{glob} = \eta_{12} \cdot \eta_{34} \cdot \eta_{45} \cdot \eta_{67}$$

Application numérique.

$$\eta_{glob} = 0.9905 \times 0.985 \times 0.986 \times 0.992$$

$$\eta_{glob} = 0.954 \approx 95.4\%$$

d. Relation entre la puissance d'entrée et la puissance de sortie d'une chaîne cinématique:

Définition.

- En admettant que le rendement global de la chaîne cinématique est de 100%

Alors →

$$P_{récepteur} = P_{moteur}$$

- En admettant que le rendement global de la chaîne cinématique est inférieur à 100%

Alors →

$$P_{récepteur} = \eta_{global} \cdot P_{moteur}$$

Pour notre exemple : $P_{récepteur} = 0.954 \cdot 3500 = 3052.8$

La puissance disponible pour le récepteur est de 3052.8 W, c'est-à-dire que 147.2 W sont perdus sous forme de chaleur.

e. Relation entre le couple d'entrée et le couple de sortie d'une chaîne cinématique:

- **A partir de la relation de puissance entrée sortie**

$$P_{récepteur} = \eta_{global} \cdot P_{moteur}$$

	TERMINALE S.T.I.	CHAINES CINEMATIQUES LES TRAINS D'ENGRENAGES Construction	9 / 10
	Jardin-Nicolas Hervé http://perso.orange.fr/herve.jardin-nicolas/		trains d'engrenages

- Et des deux relations suivantes :

$$P_{récepteur} = C_{résistant} \cdot \omega_{sortie} \quad \text{et} \quad P_{moteur} = C_{moteur} \cdot \omega_{moteur}$$

- Nous obtenons :

$$C_{résistant} \cdot \omega_{sortie} = \eta_{global} \cdot C_{moteur} \cdot \omega_{moteur}$$

- D'où :

$$\frac{\omega_{Sortie}}{\omega_{moteur}} = \eta_{global} \cdot \frac{C_{moteur}}{C_{résistant}}$$

- Nous savons que le rapport de transmission est donné par la relation suivante :

$$i = \frac{\omega_{Sortie}}{\omega_{moteur}}$$

- Alors on obtient la relation entre le couple moteur et le couple récepteur :

$$i = \eta_{global} \cdot \frac{C_{moteur}}{C_{résistant}}$$

f. Application pour notre exemple :

Calcul du couple moteur $\rightarrow C_{moteur} = \frac{P_{moteur}}{\omega_{moteur}}$ avec $\omega_{moteur} = \frac{\pi \cdot N_{moteur}}{30} \rightarrow \omega_{moteur} = \frac{\pi \cdot 1500}{30}$

$$\omega_{moteur} = \frac{\pi \cdot 1500}{30} = 157.08 \text{ rad / s}$$

$$\text{D'où } C_{moteur} = \frac{3200}{157.08} = 20.37 \text{ N.m}$$

Calcul du couple résistant appliqué par le récepteur sur l'arbre de sortie.

$$i = \eta_{global} \cdot \frac{C_{moteur}}{C_{résistant}} \rightarrow \frac{1281}{304} = 0.954 \cdot \frac{20.37}{C_{résistant}}$$

$$\text{D'où } C_{résistant} = \frac{304 \times 0.954 \times 20.37}{1281} = 4.61 \text{ N.m}$$

	TERMINALE S.T.I.	CHAINES CINEMATIQUES LES TRAINS D'ENGRENAGES Construction	10 / 10
	Jardin-Nicolas Hervé http://perso.orange.fr/herve.jardin-nicolas/		trains d'engrenages

Vérification de la valeur de la puissance de sortie.

$$P_{récepteur} = C_{résistant} \cdot \omega_{sortie}$$

Nous avons calculé précédemment $N_{sortie} = 6320.7 \text{ trs} / \text{min}$

$$\text{Alors } \omega_{sortie} = \frac{\pi \cdot 6320.7}{30} = 661.9 \text{ rad} / \text{s}$$

$$\text{Donc } P_{récepteur} = 4.61 \times 661.9 = 3052.8 \text{ W}$$

g. Conclusion :

Une réduction de la fréquence de rotation à la sortie du train d'engrenage entraîne une augmentation proportionnelle du couple de sortie disponible (et inversement).

Un réducteur de vitesse est aussi un multiplicateur de couple.